

正標数の K3 曲面と Enriques 曲面

松本雄也

ABSTRACT. 2019/10/15–18 に京都大学で行う集中講義の情報と文献リストです.

0.1. アブストラクト. 正標数の K3 曲面および Enriques 曲面について, 正標数特有の現象に重点をおいてお話しします. 話題としては次のようなものを考えています.

- 標数 0 の K3 曲面上に大域的ベクトル場は存在しない. これは正標数でも成り立つが, 証明は難しくなる.
- 正標数の K3 曲面には高さという不変量がある (1 以上 10 以下の整数または ∞ になる). 高さ ∞ の K3 曲面 (超特異とよばれる) は, H^2 が代数的サイクルのみで生成される, 単有理になりうるなど, 標数 0 と異なる性質をもつ.
- 標数 2 の Enriques 曲面は, 基本群が一般に $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ でない, Hodge–de Rham スペクトル系列が一般に E_1 退化しない, Hodge 数 $h^{ij} = \dim H^j(\Omega^i)$ が一般に $h^{ij} = h^{ji}$ を満たさない, など特徴的な性質をもつ.

0.2. 談話会タイトルおよびアブストラクト.

タイトル. 正標数 K3 曲面への有限群スキーム作用

Title. Finite group scheme actions on K3 surfaces in positive characteristic

アブストラクト. 標数 0 の K3 曲面への有限群の作用およびその商については, 商が K3 曲面 (に双有理同値) になることと大域 2 次微分形式の空間への作用が自明であることが同値であるという Nikulin の結果をはじめ, 数多くの研究がある. 標数 $p > 0$ の K3 曲面に対しても, 有限群の位数が p で割れない限りは多くの結果が同様に成り立つが, 位数が p で割れる群については独特の現象が発生する.

本講演では標数 p 特有の群スキームである μ_p および α_p の K3 曲面への作用を扱う. これらは通常有限群より厄介な対象だと思われがちだが, μ_p 作用に関して上記の Nikulin の結果と同様のことが成り立つなど, 有限群作用に関する結果のいくつかの類似が成り立つことを紹介する. また, 正標数特有の現象として, K3 曲面の高さという不変量との関係を紹介する.

参考. 近い内容の講演を 2019 年 9 月 20 日に日本数学会秋季総合分科会で行いました, そのときのアブストラクトが <http://yuyamatsumoto.com/k3kanazawa.pdf> にあります.

Date: 2019/10/18.

2010 Mathematics Subject Classification. 14J28 (Primary) 14F30 (Secondary).

本研究は JSPS 科研費 JP16K17560 の助成を受けたものです. .

0.3. 成績について. 単位がほしい人は, 講義中に述べる問題を 3 題以上解いたレポートを提出してください. 提出先は京大の数学事務室です. 締切は 11 月 29 日 (金) です (締切時刻は事務室に確認してください).

なお, 講義と講義ノート (後日公開予定) で問題が異なる可能性があります, どちらの問題も有効とします.

「チャレンジ問題」も上記の「問題」に含めますが, 解の存在を保証しないものも含めます, 解の概念が明確でないものも含めます, 解けた場合はレポートより論文にすることをお勧めします.

0.4. 講義内容予定. (多少前後する可能性があります.)

	10:00–12:00	15:00–17:00	16:30–17:30
10月15日(火)		(1)	
10月16日(水)	(2)		談話会
10月17日(木)	(3)	(4)	
10月18日(金)	(5)		

(1) K3 曲面の定義と例, K3 曲面のコホモロジー

(2) コホモロジーの続き, ベクトル場, 変形と lifting

(3) K3 曲面の高さ

(4) supersingular K3 曲面と unirationality

(5) Enriques 曲面

談話会 「正標数 K3 曲面への有限群スキーム作用」

場所は理学部 3 号館 127 号室 (談話会のみ 110 号室) の予定.

0.5. 文献案内.

代数曲面: Barth–Hulek–Peters–Van de Ven [BHPV04] (複素), Beauville [Bea96] (複素), Badescu [Băd01] (任意の標数).

K3 曲面: Beauville–Bourguignon–Demazure (編) [BBD85] (通称 Astérisque 126) (複素, Torelli の定理), Huybrechts [Huy16] (正標数も含む), 金銅 [金銅 15] (日本語) (複素).

正標数代数曲面: Liedtke のサーベイ [Lie13] (正標数代数曲面) と [Lie16] (正標数 K3 曲面) にさまざまな話題が載っている.

各種コホモロジー: 各章で紹介する.

0.6. 講義ノートについて. 近日中に <http://yuyamatsumoto.com/> 上で公開したいと思っています.

A. チャレンジ問題

A.1. 講義で触れた問題.

チャレンジ問題 **A.1.** K3 曲面の新しい構成法を与えよ.

チャレンジ問題 **A.2.** 高次元 Calabi–Yau 多様体 X に対して $h^0(\Omega^1)$ や $h^0(T)$ はどうなるか? 0 でない例は見つかっていないと聞きましたが, うろ覚えです. なお Calabi–Yau 多様体の定義はいくつか流儀があった気もしますが, とりあえず smooth projective で $\Omega_X^{\dim X} \cong \mathcal{O}_X$ かつ $h^i(\mathcal{O}_X) = 0$ ($0 < i < \dim X$) としておきましょうか.

チャレンジ問題 **A.3.** 好きな条件・構造込みで K3 曲面の標数 0 への lifting の存在を調べよう! (例: supersingular で Picard 群の大きい部分群, supersingular で CM, wild な自己同型, など……)

チャレンジ問題 A.4. M_n の特異点についてはどうなるか？（メモ：[Ogu01] にいろいろ書いてありそう。）

チャレンジ問題 A.5. 不等式 $\rho \leq 22 - 2h$ を満たす任意の $h \in \{1, \dots, 10\}$ と $\rho \in \{1, \dots, 20\}$ に対して、任意の標数の代数閉体上で高さ h かつ Picard 数 ρ の K3 曲面は存在するか？（ヒント： $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上では Tate 予想から ρ は偶数になるので、 ρ が奇数ならそれ以外の代数閉体上で考える必要がある。）

チャレンジ問題 A.6. K3 曲面（や高次元 Calabi–Yau 多様体）の高さを判定する新しい方法を見つけよ。特殊な場合や部分的判定（上から・下からの評価など）でもよい。

チャレンジ問題 A.7. Shioda supersingular な K3 曲面（や高次元 Calabi–Yau 多様体）の Artin invariant を判定する新しい方法を見つけよ。特殊な場合や部分的判定（上から・下からの評価など）でもよい。

チャレンジ問題 A.8. supersingular K3 曲面の unirationality を証明しよう！または、unirational でない supersingular K3 曲面を構成しよう（または別の方法で存在を証明しよう）！

チャレンジ問題 A.9. 標数 2 の classical または supersingular な Enriques 曲面 X に対して、 $h^0(\Omega^1) = 1$ である。……をもっと簡単に証明しませんか？

チャレンジ問題 A.10. 標数 2 の classical, supersingular Enriques 曲面のモジュライ空間に、 $\text{Sing}(Y)$ の各配置に応じた部分空間がある。これについて調べよ。（stratification をなすか？各部分空間の次元は？ Y が non-normal になる部分空間は？ Y が RDP K3 曲面である場合にその Artin invariant との関係は？……）

A.2. 追加問題.

チャレンジ問題 A.11. X が標数 $p > 2$ の supersingular K3 曲面のとき、 $\text{Aut}(X) \rightarrow \text{Aut}(\Omega_X^2) \cong k^*$ の像は有限で、位数は p^{σ_0+1} を割り切る (Nygaard [Nyg80, Theorem 2.1]). $p = 2$ のときどうか？ ([Nyg80, Theorem 1.12] の中で使っている [Ogu79, Proposition 3.13.3] が $p \neq 2$ を使っているように見える.)

格子が関わってくる話では、2 が可逆でない環上では二次形式と双線形形式が等価にならないのが議論の障害になりやすいのかもしれない。

チャレンジ問題 A.12. crystalline Torelli theorem および Shioda supersingular K3 の非退化を標数 2 で証明しよう！（なお、標数 2 では 2 次形式まわりの議論がややこしくなるので、一方から他方が容易に示せるかどうかも私には分かりません。）

チャレンジ問題 A.13. 標数 p の代数閉体 k 上の RDP K3 曲面 X に $G \in \{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mu_p, \alpha_p\}$ が作用しているとする。これは標数 0 に lift するか？ここで lift は次の（弱めの）意味にしましょう。 $W(k)$ の（分岐してもよい）有限拡大 R と、 R 上の proper な代数空間 \mathcal{X} で各ファイバーが RDP K3 曲面であるものと、 R 上の位数 p 群スキーム \mathcal{G} と、 \mathcal{G} の \mathcal{X} への作用が存在し、 $\mathcal{G} \otimes_R k \cong G$ であり、 $\mathcal{X} \otimes_R k$ は X に作用込みで双有理同値である。

ちなみに、これが肯定的に証明されると、標数 $p \in \{13, 17, 19\}$ の RDP K3 曲面に α_p は非自明に作用できないことが従い、 μ_p や α_p 作用が存在する p の決定が完了するので、私が喜びます。（標数 0 での位数 p 自己同型の唯一

の例の標数 p 還元は μ_p 作用になっている ([Mat19a, Example 9.6]). なお標数 0 でのこの例は金銅 [Kon92, Section 7] により, 一意性は小木曾-Zhang [OZ00, Corollary 3] による.)

チャレンジ問題 A.14. [Moo98] では, アーベル多様体のモジュライ空間である志村多様体の部分多様体は, ある標数 p の ordinary な点で linearity という条件を満たすならば Hodge 型部分多様体である, ということが示されている. K3 曲面のモジュライ空間と関係の深い直交型志村多様体について, 同様のことがいえるか?

チャレンジ問題 A.15. 代数曲面や複素解析的曲面の自己同型の H^2 への作用の固有方程式を P とおく ($H^2(X, \mathbb{Z})$ でも $H_{\text{ét}}^2(X, \mathbb{Q}_l)$ でも $H_{\text{crys}}^2(X/W(k))$ でも同じ [?]). P は円分多項式 0 個以上と, Salem 多項式 0 個または 1 個との積になることが知られている (例えば [Can14]). Salem 多項式がある場合, その 1 より大きい実根がただ 1 つあり, (それは定義より Salem 数であり,) それをこの自己同型の力学的次数とよぶ. なお, Salem 数が現れるのは曲面のうち有理曲面, トーラス, K3 曲面, Enriques 曲面に限られることが知られている. 標数 0 の K3 曲面の自己同型の力学的次数として実現できる最小の Salem 数は $x^{10} + x^9 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1 = 0$ の根 ~ 1.17628 であることが知られている (McMullen [McM16, Theorem 1.1]) (ちなみに, これは現在知られている最小の Salem 数でもあり, Lehmer 数という名前がある). 標数 0 の Enriques 曲面の場合の最小値は $x^6 - x^4 - 2x^3 - x^2 + 1 = 0$ の根 ~ 1.58234 であると最近アナウンスされた [OY18, Theorem 1.1]. 複素解析的トーラスの場合にはどの Salem 数が実現可能かの判定方法が知られている [Res12, Theorem 1.1].

標数 p の有理曲面, アーベル曲面, K3 曲面, Enriques 曲面の場合は何が最小値か? また, どの Salem 数が実現可能かはどうやって判定できるか?

ちなみに, 標数 0 の K3 曲面では非自明な部分空間 $\text{Pic}(X) \subset H^2(X, \mathbb{Z})$ があるので, P は必ず可約であり, 力学的次数の次数は高々 20 である. 一方標数 p の (supersingular) K3 曲面では 22 次になる例が存在する¹.

定義. $2d$ 次の代数的整数 $1 < \lambda \in \mathbb{R}$ は, その \mathbb{Q} 上の代数的共役が λ, λ^{-1} および絶対値 1 の複素数 $\alpha_1, \dots, \alpha_{2d-2}$ であるとき Salem 数であるといい, その \mathbb{Q} 上の最小多項式を Salem 多項式という.

REFERENCES

- [Art69] M. Artin, *Algebraization of formal moduli. I*, Global Analysis (Papers in Honor of K. Kodaira), Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1969, pp. 21–71.
- [ASD73] M. Artin and H. P. F. Swinnerton-Dyer, *The Shafarevich-Tate conjecture for pencils of elliptic curves on K3 surfaces*, Invent. Math. **20** (1973), 249–266.
- [Art74a] M. Artin, *Algebraic construction of Brieskorn’s resolutions*, J. Algebra **29** (1974), 330–348.
- [Art74b] ———, *Supersingular K3 surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 543–567 (1975).
- [Art77] ———, *Coverings of the rational double points in characteristic p* , Complex analysis and algebraic geometry, Iwanami Shoten, Tokyo, 1977, pp. 11–22.
- [AM77] M. Artin and B. Mazur, *Formal groups arising from algebraic varieties*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **10** (1977), no. 1, 87–131.
- [Băd01] Lucian Bădescu, *Algebraic surfaces*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2001. Translated from the 1981 Romanian original by Vladimir Maşek and revised by the author.

¹これも複素解析的 K3 曲面でできそうだが.

- [BHPV04] Wolf P. Barth, Klaus Hulek, Chris A. M. Peters, and Antonius Van de Ven, *Compact complex surfaces*, 2nd ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge., vol. 4, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [Bea96] Arnaud Beauville, *Complex algebraic surfaces*, 2nd ed., London Mathematical Society Student Texts, vol. 34, Cambridge University Press, Cambridge, 1996. Translated from the 1978 French original by R. Barlow, with assistance from N. I. Shepherd-Barron and M. Reid.
- [BBD85] Arnaud Beauville, Jean-Pierre Bourguignon, and Michel Demazure (eds.), *Géométrie des surfaces K3: modules et périodes*, Société Mathématique de France, Paris, 1985 (French). Papers from the seminar held in Palaiseau, October 1981–January 1982; Astérisque No. 126 (1985).
- [Ber74] Pierre Berthelot, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$* , Lecture Notes in Mathematics, Vol. 407, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974 (French).
- [BO83] P. Berthelot and A. Ogus, *F-isocrystals and de Rham cohomology. I*, Invent. Math. **72** (1983), no. 2, 159–199.
- [BO78] Pierre Berthelot and Arthur Ogus, *Notes on crystalline cohomology*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1978.
- [BMS18] Bhargav Bhatt, Matthew Morrow, and Peter Scholze, *Integral p -adic Hodge theory*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **128** (2018), 219–397.
- [BM76] E. Bombieri and D. Mumford, *Enriques' classification of surfaces in char. p . III*, Invent. Math. **35** (1976), 197–232.
- [BM77] ———, *Enriques' classification of surfaces in char. p . II*, Complex analysis and algebraic geometry, Iwanami Shoten, Tokyo, 1977, pp. 23–42.
- [BLR90] Siegfried Bosch, Werner Lütkebohmert, and Michel Raynaud, *Néron models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 21, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [BL19a] Daniel Bragg and Max Lieblich, *Twistor spaces for supersingular K3 surfaces* (2019), available at <https://arxiv.org/abs/1804.07282v6>.
- [BL19b] ———, *Perfect points on curves of genus one and consequences for supersingular K3 surfaces* (2019), available at <https://arxiv.org/abs/1904.04803>.
- [BR75] Dan Burns Jr. and Michael Rapoport, *On the Torelli problem for kählerian $K - 3$ surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **8** (1975), no. 2, 235–273.
- [Can14] Serge Cantat, *Dynamics of automorphisms of compact complex surfaces*, Frontiers in complex dynamics, Princeton Math. Ser., vol. 51, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2014, pp. 463–514.
- [CL98] Antoine Chambert-Loir, *Cohomologie cristalline: un survol*, Exposition. Math. **16** (1998), no. 4, 333–382 (French, with English and French summaries).
- [CvS09] Sławomir Cynk and Duco van Straten, *Small resolutions and non-liftable Calabi-Yau threefolds*, Manuscripta Math. **130** (2009), no. 2, 233–249.
- [Del81] P. Deligne, *Relèvement des surfaces K3 en caractéristique nulle*, Algebraic surfaces (Orsay, 1976), Lecture Notes in Math., vol. 868, Springer, Berlin, 1981, pp. 58–79 (French). Prepared for publication by Luc Illusie.
- [DI87] Pierre Deligne and Luc Illusie, *Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham*, Invent. Math. **89** (1987), no. 2, 247–270 (French).
- [Die55] Jean Dieudonné, *Lie groups and Lie hyperalgebras over a field of characteristic $p > 0$. IV*, Amer. J. Math. **77** (1955), 429–452.
- [DK03] I. Dolgachev and S. Kondō, *A supersingular K3 surface in characteristic 2 and the Leech lattice*, Int. Math. Res. Not. **1** (2003), 1–23.
- [ESB04] T. Ekedahl and N. I. Shepherd-Barron, *On exceptional Enriques surfaces* (2004), available at <http://arxiv.org/abs/math/0405510>.
- [EHSB12] T. Ekedahl, J. M. E. Hyland, and N. I. Shepherd-Barron, *Moduli and periods of simply connected Enriques surfaces* (2012), available at <http://arxiv.org/abs/1210.0342>.
- [Fed83] Richard Fedder, *F-purity and rational singularity*, Trans. Amer. Math. Soc. **278** (1983), no. 2, 461–480.

- [Fu15] Lei Fu, *Etale cohomology theory*, Revised edition, Nankai Tracts in Mathematics, vol. 14, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2015.
- [vdGK00] G. van der Geer and T. Katsura, *On a stratification of the moduli of K3 surfaces*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **2** (2000), no. 3, 259–290.
- [GH94] Phillip Griffiths and Joseph Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original.
- [Gro68] A. Grothendieck, *Crystals and the de Rham cohomology of schemes*, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, Adv. Stud. Pure Math., vol. 3, North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 306–358. Notes by I. Coates and O. Jussila.
- [Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [Haz12] Michiel Hazewinkel, *Formal groups and applications*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2012. Corrected reprint of the 1978 original.
- [Hir99] Masayuki Hirokado, *A non-liftable Calabi-Yau threefold in characteristic 3*, Tohoku Math. J. (2) **51** (1999), no. 4, 479–487.
- [HIS07] Masayuki Hirokado, Hiroyuki Ito, and Natsuo Saito, *Calabi-Yau threefolds arising from fiber products of rational quasi-elliptic surfaces. I*, Ark. Mat. **45** (2007), no. 2, 279–296.
- [HIS08] ———, *Calabi-Yau threefolds arising from fiber products of rational quasi-elliptic surfaces. II*, Manuscripta Math. **125** (2008), no. 3, 325–343.
- [Huy16] Daniel Huybrechts, *Lectures on K3 Surfaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 158, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- [Ill79] Luc Illusie, *Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **12** (1979), no. 4, 501–661 (French).
- [Ito17] Kazuhiro Ito, *Finiteness of Brauer groups of K3 surfaces in characteristic 2* (2017), available at <https://arxiv.org/abs/1704.06232>.
- [Ito18] ———, *On the Supersingular Reduction of K3 Surfaces with Complex Multiplication*, International Mathematics Research Notices (2018).
- [IIK18] Kazuhiro Ito, Tetsushi Ito, and Teruhisa Koshikawa, *CM liftings of K3 surfaces over finite fields and their applications to the Tate conjecture* (2018), available at <https://arxiv.org/abs/1809.09604>.
- [Jan14] Junmyeong Jang, *Some remarks on non-symplectic automorphisms of k3 surfaces over a field of odd characteristic*, East Asian Math. J. **30** (2014), no. 3, 321–326.
- [Jan16] ———, *A lifting of an automorphism of a K3 surface over odd characteristic*, Int. Math. Res. Notices (2016).
- [Kat78] Toshiyuki Katsura, *On Kummer surfaces in characteristic 2*, Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977), Kinokuniya Book Store, Tokyo, 1978, pp. 525–542.
- [KU85] Toshiyuki Katsura and Kenji Ueno, *On elliptic surfaces in characteristic p*, Math. Ann. **272** (1985), no. 3, 291–330.
- [Kod64] K. Kodaira, *On the structure of compact complex analytic surfaces. I*, Amer. J. Math. **86** (1964), 751–798.
- [KU19] Takayuki Koike and Takato Uehara, *A gluing construction of K3 surfaces* (2019), available at <https://arxiv.org/abs/1903.01444>.
- [Kon92] Shigeyuki Kondō, *Automorphisms of algebraic K3 surfaces which act trivially on Picard groups*, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), no. 1, 75–98.
- [金銅 15] 金銅 誠之, *K3 曲面, 共立講座 数学の輝き*, vol. 5, 共立出版, 2015.
- [Lan80] William E. Lang, *Two theorems on de Rham cohomology*, Compositio Math. **40** (1980), no. 3, 417–423.
- [LN80] William E. Lang and Niels O. Nygaard, *A short proof of the Rudakov-Šafarevič theorem*, Math. Ann. **251** (1980), no. 2, 171–173.
- [LM18] Max Lieblich and Daves Maulik, *A note on the cone conjecture for K3 surfaces in positive characteristic*, Math. Res. Lett. **25** (2018), no. 6, 1879–1891.

- [LO15] Max Lieblich and Martin Olsson, *Fourier-Mukai partners of K3 surfaces in positive characteristic*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **48** (2015), no. 5, 1001–1033.
- [Lie13] Christian Liedtke, *Algebraic surfaces in positive characteristic*, Birational geometry, rational curves, and arithmetic, Simons Symp., Springer, Cham, 2013, pp. 229–292.
- [Lie15a] ———, *Supersingular K3 surfaces are unirational*, Invent. Math. **200** (2015), no. 3, 979–1014.
- [Lie15b] ———, *Arithmetic moduli and lifting of Enriques surfaces*, J. Reine Angew. Math. **706** (2015), 35–65.
- [Lie16] ———, *Lectures on supersingular K3 surfaces and the crystalline Torelli theorem*, K3 surfaces and their moduli, Progr. Math., vol. 315, Birkhäuser/Springer, [Cham], 2016, pp. 171–235.
- [Man63] Ju. I. Manin, *Theory of commutative formal groups over fields of finite characteristic*, Uspehi Mat. Nauk **18** (1963), no. 6 (114), 3–90 (Russian). English translation: Russ. Math. Surv. **18:6** (1963), 1–83.
- [松本 16] 松本 雄也, 志村多様体と K3 曲面: Tate 予想への応用 (2016), available at http://yuyamatsumoto.com/k3tate_proc.pdf. 整数論サマースクール 2015 報告集原稿.
- [Mat19a] Yuya Matsumoto, μ_n -actions on K3 surfaces in positive characteristic (2019), available at <http://arxiv.org/abs/1710.07158v2>.
- [Mat19b] ———, μ_p - and α_p -actions on K3 surfaces in characteristic p (2019), available at <http://arxiv.org/abs/1812.03466v2>.
- [Mat19c] ———, *Canonical coverings of Enriques surfaces in characteristic 2* (2019), available at <http://arxiv.org/abs/1812.06914v2>.
- [Mat19d] ———, *Inseparable maps on W_n -valued Ext groups of non-taut rational double point singularities and the height of K3 surfaces* (2019), available at <http://arxiv.org/abs/1907.04686>.
- [Maz72] B. Mazur, *Frobenius and the Hodge filtration*, Bull. Amer. Math. Soc. **78** (1972), 653–667.
- [McM16] Curtis T. McMullen, *Automorphisms of projective K3 surfaces with minimum entropy*, Invent. Math. **203** (2016), no. 1, 179–215.
- [MR85] V. B. Mehta and A. Ramanathan, *Frobenius splitting and cohomology vanishing for Schubert varieties*, Ann. of Math. (2) **122** (1985), no. 1, 27–40.
- [Moo98] Ben Moonen, *Linearity properties of Shimura varieties. II*, Compositio Math. **114** (1998), no. 1, 3–35.
- [Nik79] V. V. Nikulin, *Integral symmetric bilinear forms and some of their applications*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), no. 1, 111–177, 238 (Russian). English translation: Math. USSR-Izv. **14** (1979), no. 1, 103–167 (1980).
- [Nyg79a] Niels O. Nygaard, *Closedness of regular 1-forms on algebraic surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **12** (1979), no. 1, 33–45.
- [Nyg79b] ———, *A p -adic proof of the nonexistence of vector fields on K3 surfaces*, Ann. of Math. (2) **110** (1979), no. 3, 515–528.
- [Nyg80] ———, *Higher de Rham-Witt complexes of supersingular K3 surfaces*, Compositio Math. **42** (1980/81), no. 2, 245–271.
- [Nyg83] N. O. Nygaard, *The Tate conjecture for ordinary K3 surfaces over finite fields*, Invent. Math. **74** (1983), no. 2, 213–237.
- [NO85] Niels Nygaard and Arthur Ogus, *Tate’s conjecture for K3 surfaces of finite height*, Ann. of Math. (2) **122** (1985), no. 3, 461–507.
- [Oda69] Tadao Oda, *The first de Rham cohomology group and Dieudonné modules*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **2** (1969), 63–135.
- [OY18] Keiji Oguiso and Xun Yu, *Minimum positive entropy of complex Enriques surface automorphisms* (2018), available at <http://arxiv.org/abs/1807.09452>.
- [OZ00] Keiji Oguiso and De-Qi Zhang, *On Vorontsov’s theorem on K3 surfaces with non-symplectic group actions*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), no. 6, 1571–1580.

- [Ogu79] Arthur Ogus, *Supersingular K3 crystals*, Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (Rennes, 1978), Astérisque, vol. 64, Soc. Math. France, Paris, 1979, pp. 3–86.
- [Ogu83] ———, *A crystalline Torelli theorem for supersingular K3 surfaces*, Arithmetic and geometry, Vol. II, Progr. Math., vol. 36, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, pp. 361–394.
- [Ogu01] ———, *Singularities of the height strata in the moduli of K3 surfaces*, Moduli of abelian varieties (Texel Island, 1999), Progr. Math., vol. 195, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 325–343.
- [PSS71] I. I. Pjateckii-Shapiro and I. R. Shafarevich, *Torelli's theorem for algebraic surfaces of type K3*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **35** (1971), 530–572 (Russian).
- [Res12] Paul Reschke, *Salem numbers and automorphisms of complex surfaces*, Math. Res. Lett. **19** (2012), no. 2, 475–482.
- [RS76] A. N. Rudakov and I. R. Shafarevich, *Inseparable morphisms of algebraic surfaces*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **40** (1976), no. 6, 1269–1307, 1439 (Russian). English translation: Math. USSR-Izv. **10** (1976), no. 6, 1205–1237.
- [RS78a] ———, *Quasi-elliptic surfaces of type K3*, Uspehi Mat. Nauk **33** (1978), no. 1(199), 227–228 (Russian). English translation: Russ. Math. Surv. **33**:1 (1978), 215–216.
- [RS78b] ———, *Supersingular K3 surfaces over fields of characteristic 2*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **42** (1978), no. 4, 848–869 (Russian). English translation: Math. USSR-Izv. **13** (1979), no. 1, 147–165.
- [RS81] ———, *Surfaces of type K3 over fields of finite characteristic*, Current problems in mathematics, Vol. 18, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Informatsii, Moscow, 1981, pp. 115–207 (Russian). English translation: J. of Soviet Math. **22** (1983), no. 4, 1476–1533.
- [RZS82] A. N. Rudakov, T. Zink, and I. R. Shafarevich, *The influence of height on degenerations of algebraic surfaces of type K3*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), no. 1, 117–134, 192 (Russian). English translation: Math. USSR-Izv. **20** (1982), no. 1, 119–135 (1983).
- [Sch09] Chad Schoen, *Desingularized fiber products of semi-stable elliptic surfaces with vanishing third Betti number*, Compos. Math. **145** (2009), no. 1, 89–111.
- [Sch04] Stefan Schröer, *Some Calabi-Yau threefolds with obstructed deformations over the Witt vectors*, Compos. Math. **140** (2004), no. 6, 1579–1592.
- [Ser06] Edoardo Sernesi, *Deformations of algebraic schemes*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 334, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [SGA4] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269, 270, 305, Springer-Verlag, Berlin, 1973 (French). Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4); Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat.
- [SGA4 1/2] P. Deligne, *Cohomologie étale*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 569, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA 4 $\frac{1}{2}$; Avec la collaboration de J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J. L. Verdier.
- [Ser55] Jean-Pierre Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **6** (1955), 1–42 (French).
- [Ser73] J.-P. Serre, *A course in arithmetic*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973. Translated from the French; Graduate Texts in Mathematics, No. 7.
- [Shi74a] Tetsuji Shioda, *Kummer surfaces in characteristic 2*, Proc. Japan Acad. **50** (1974), 718–722.
- [Shi74b] ———, *An example of unirational surfaces in characteristic p*, Math. Ann. **211** (1974), 233–236.
- [Shi77] ———, *Some results on unirationality of algebraic surfaces*, Math. Ann. **230** (1977), no. 2, 153–168.

- [Shi79] ———, *Supersingular K3 surfaces*, Algebraic geometry (Proc. Summer Meeting, Univ. Copenhagen, Copenhagen, 1978), Lecture Notes in Math., vol. 732, Springer, Berlin, 1979, pp. 564–591.
- [Sil86] Joseph H. Silverman, *The arithmetic of elliptic curves*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 106, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [Sil94] ———, *Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 151, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [Siu83] Y. T. Siu, *Every K3 surface is Kähler*, Invent. Math. **73** (1983), no. 1, 139–150.
- [Tat52] John Tate, *Genus change in inseparable extensions of function fields*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 400–406.
- [TO70] John Tate and Frans Oort, *Group schemes of prime order*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **3** (1970), 1–21.
- [Tod80] Andrei N. Todorov, *Applications of the Kähler-Einstein-Calabi-Yau metric to moduli of K3 surfaces*, Invent. Math. **61** (1980), no. 3, 251–265.
- [Voi07] Claire Voisin, *Hodge theory and complex algebraic geometry. I*, Reprint of the 2002 English edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 76, Cambridge University Press, Cambridge, 2007. Translated from the French by Leila Schneps.
- [Wed08] Torsten Wedhorn, *De Rham cohomology of varieties over fields of positive characteristic*, Higher-dimensional geometry over finite fields, NATO Sci. Peace Secur. Ser. D Inf. Commun. Secur., vol. 16, IOS, Amsterdam, 2008, pp. 269–314.
- [Wei94] Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [Yob19] Fuetaro Yobuko, *Quasi-Frobenius splitting and lifting of Calabi-Yau varieties in characteristic p* , Math. Z. **292** (2019), no. 1-2, 307–316.
- [Zar58a] Oscar Zariski, *On Castelnuovo's criterion of rationality $p_a = P_2 = 0$ of an algebraic surface*, Illinois J. Math. **2** (1958), 303–315.
- [Zar58b] ———, *Introduction to the problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces*, Publications of the Mathematical Society of Japan, no. 4, The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1958.

E-mail address: matsumoto.yuya.m@gmail.com