Derivations on K3 surfaces in positive characteristic

松本雄也　(東京理科大学)*

日本数学会2019年度秋季総合分科会　2019年09月20日

概　要

標数$p > 0$のK3曲面上のderivationは自明なもの以外に存在しない（定理2.5）が，RDP K3曲面（定義1.2）上には非自明なものが存在することがある．そのうちμ_p, α_p作用に対応するものに関する私の研究結果について述べる．主な結果として，μ_p作用について商がRDP K3曲面であることと作用がsymplecticであることの同値性（定理4.4），$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, μ_p, α_p作用で商がRDP K3曲面であるときの商特異点の決定（定理4.8），μ_p, α_p作用で商がRDP K3曲面であるときの高さの決定（定理6.2）がある．

1節で有理二重点（RDP）について，3節でderivationについて，5節でK3曲面の高さについて復習する．2節では標数0のK3曲面への有限群作用とその正標数還元について述べ，RDP K3曲面およびそれへのμ_p, α_pの作用が自然に現れることを見る．4節ではまずK3曲面への素数位数巡回群の作用について復習した後，μ_p, α_pの作用に関する結果を紹介する．6節では，RDP K3曲面のμ_pまたはα_pによる商がRDP K3曲面である場合に，これらの曲面の高さを決定できることを説明する．

本稿では代数閉体k上で考える（2節を除く）．

1. 有理二重点（RDP）

定義 1.1. 正則でない2次元正規局所環$X = \operatorname{Spec} A$が**有理二重点** *(rational double point, RDP)* であるとは，最小特異点解消$\tilde{X} \to X$に対して$K_{\tilde{X}/X} = 0$が成り立つことである．

このとき，最小特異点解消の例外曲線のなす双対グラフはA_n $(n \geq 1)$, D_n $(n \geq 4)$, E_n $(n = 6, 7, 8)$ 型のDynkin図形になる．特異点のこともA_n型，D_n型，E_n型とよぶ．

標数0では，RDPであることは，$\mathrm{SL}_2(k)$の（非自明な）有限部分群による正則局所環の商の形に書けることと同値である．正標数ではこの同値は成り立たないが，位数が標数と素な$\mathrm{SL}_2(k)$の（非自明な）有限部分群による商はRDPである．

ほとんどの場合は標数とDynkin図形から特異点（の完備化）の同型類は一意に定まるが，一部の場合では複数の同型類が存在する．それらをnon-taut RDPとよぶ．標数2のD_nとE_n，標数3のE_n，標数5のE_8が該当する．Artin [Art77]の分類および記号に従い，第2の添字rを用いてD_n^r, E_n^rと表す．

定義 1.2. 特異点が高々RDPである曲面を*RDP*曲面とよぶ（滑らかなものも含める）．

properなRDP曲面で最小特異点解消がK3曲面 (resp. Enriques曲面) であるものを*RDP K3*曲面 (resp. *RDP Enriques*曲面) とよぶ（滑らかなものも含める）．

本研究はJSPS頭脳循環を加速する戦略的国際研究ネットワーク推進プログラムR2603およびJSPS科研費JP15H05738, JP16K17560の助成を受けたものです．
2010 Mathematics Subject Classification: 14J28 (Primary) 14L20, 14L30, 14J17, 14B15 (Secondary)
* 〒278-8510 千葉県野田市山崎2641 東京理科大学理工学部数学科
e-mail: matsumoto.yuya.m@gmail.com, matsumoto_yuya@ma.noda.tus.ac.jp
web: http://yuyamatsumoto.com/

2. K3曲面への有限群作用とその正標数還元

（標数pの）RDP K3曲面へのμ_p, α_pへの作用を考える動機の一つは，それらが標数0のK3曲面上の位数p自己同型の標数p還元として自然に現れることである．

Rを完備離散付値環とし，その商体をK，剰余体をkと書く．以下Kは標数0でkは標数$p > 0$と仮定する．

定義 2.1. XをK上のK3曲面とする．

(1) R上固有かつ滑らかな代数空間$\mathcal{X}$であって，$\mathcal{X} \otimes_R K \cong X$を満たすものを（$X$の$R$上の）*smooth model*とよぶ．

(2) R上固有な代数空間$\mathcal{X}$であって，$\mathcal{X} \otimes_R K \cong X$を満たし，$\mathcal{X} \otimes_R k$はRDP曲面であるものを（$X$の$R$上の）*RDP model*とよぶ．

定義 2.2. smooth modelが存在するときXは（R上）**良い還元をもつ**という．

なお正確には代数空間$\mathcal{X}$と同型射$\mathcal{X} \otimes_R K \cong X$の組のことをmodelとよぶべきだが，ここでは気にしない．次が成り立つ．

命題 2.3 ([LM18b, Section 4]など)**.** (1) 定義2.1の(1) (resp. (2))において，特殊ファイバー$\mathcal{X}_k := \mathcal{X} \otimes_R k$はK3曲面 (resp. RDP K3曲面) になる．

(2) RDP modelの特殊ファイバーの最小特異点解消はmodelのとり方によらず同型になる．

(3) XがRDP modelをもつならば，適当な有限次拡大R'/R上で$X_{R'} := X \otimes_R R'$はsmooth modelをもつ．

さて，XをR上良い還元をもつK3曲面とし，有限群GがXに（忠実に）作用しているとする．この作用は（Kを適当に拡大したうえで）適当なsmooth modelに延長できることもあるし，できないこともある．

Gの位数がpと素である場合には，作用が延長可能である（延長するsmooth modelが存在する）ための十分条件を[Mat16, Theorems 1.1, 1.3]で与えた．例えばGのXへの作用がsymplectic（定義4.1）ならば十分である．

一方で，Gの位数がpの冪である場合，G作用の延長の特殊ファイバーへの制限が自明になってしまうことがある．この場合，抽象群Gの作用の延長ではなく，K上でGに同型なR上の群スキーム$\mathcal{G}$の作用への延長を考える方が適切である．次が示せる．

命題 2.4. Xを良い還元をもつK3曲面とし，位数pの巡回群GがXに作用しているとする．このとき，Rを適当な有限次拡大で置き換えると次が成り立つ．$\mathcal{G} \otimes_R K \cong G$を満たす$R$上の有限平坦群スキーム$\mathcal{G}$と，$X$の$R$上のRDP model $\mathcal{X}$と，$\mathcal{G}$の$\mathcal{X}$への作用であって，K上ではGのXへの作用に一致し，k上での$\mathcal{G}_k$の$\mathcal{X}_k$への作用が非自明であるものが存在する．さらに，$\mathcal{G}_k$はmodelによらず定まり，$\mathcal{X}_k$は$\mathcal{G}_k$作用込みで双有理同値を除きmodelによらず定まる．

このとき，$\mathcal{G}_k$はk上の長さpの有限群スキームであり，したがって（kを有限次拡大で置き換えれば）$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, μ_p, α_pのいずれかに同型である．

後述の命題3.2から，μ_pやα_pの作用はある種のderivationと対応する．次の事実から，$\mathcal{G}_k$がμ_pまたはα_pである場合，$\mathcal{X}_k$は必ず特異点を1つ以上もつことが分かる．

定理 2.5 (Rudakov–Shafarevich [RS76, Theorem 7], Nygaard [Nyg79, Corollary 3.5], Lang–Nygaard [LN80])**.** （滑らかな）K3曲面上のderivationは0以外に存在しない．

μ_p 作用や α_p 作用の例を挙げよう．

例 2.6. $y^2=x^3+t^7x+t$ で定まる標数 0 の楕円 K3 曲面は $(g(x),g(y),g(t))=(\zeta_{19}^2x,\zeta_{19}^3y,\zeta_{19}^6t)$ という位数 19 の自己同型 g をもつ．同じ式が $\mathbb{Z}_{19}[\zeta_{19}]$ 上の RDP model を与える（標数 $p=19$ での特殊ファイバー $\mathcal{X}_k$ は $t=(-27/4)^{1/19}$ で A_{18} 型 RDP をもつ）．ζ_{19} の還元は 1 なので，この自己同型 g の式をそのまま適用すると自明になってしまう．その代わりに，$G=\langle g\rangle$ の作用は，RDP model へのある群スキーム $\mathcal{G}$ の作用に延長でき，それは $\mathcal{X}_k$ 上に $(D(x),D(y),D(t))=(2x,3y,6t)$ という derivation D (of multiplicative type) に対応する μ_{19} 作用を誘導する．この D 作用は $\mathcal{X}_k$ の特異点解消には延長できず，したがって $\mathcal{G}$ 作用は smooth model には延長できない．

$w^2=x^6+xy^5+yz^5$ で定まる標数 0 の K3 曲面は $(g(w):g(x):g(y):g(z))=(w:x:\zeta_{25}^5y:\zeta_{25}^4z)$ という位数 25 の自己同型 g をもつ．適切に変形した式が剰余標数 $p=5$ の RDP model を与える．g の還元は位数（25 ではなく）5 の自己同型を与える．$G=\langle g^5\rangle$ の作用は特殊ファイバー上の α_5 作用を誘導する（細かい計算は省略する）．

ちなみに，これらの K3 曲面と自己同型は，標数 0 で位数 19, 25 を達成する唯一の例である（例は金銅 [Kon92, Section 7] により与えられ．一意性は小木曽–Zhang [OZ00, Theorem 2] により示された）．

逆に，標数 p の K3 曲面と μ_p または α_p の作用が与えられたとき，標数 0 への lifting が存在するかも興味深い問題である．次の意味で肯定的に予想している．

予想 2.7. X は標数 p の体 k 上の RDP K3 曲面で，$G=\mu_p$ または $G=\alpha_p$ が作用しているとする．このとき，k を剰余体にもつ完備離散付値環 R，R 上の長さ p の有限平坦群スキーム $\mathcal{G}$，R の商体上の K3 曲面の R 上の RDP model $\mathcal{X}$，および $\mathcal{G}$ の $\mathcal{X}$ への作用であって，$\otimes_R k$ すると G の X への作用に一致するものが存在する．

根拠としては，まず K3 曲面単独ならばいつでも lifting が存在すること，μ_p 作用は標数 $\neq p$ での $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 作用とパラレルな性質が多いこと，α_p 作用は μ_p 作用または $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 作用の極限として書けることが多いことが挙げられる．一方，一般の有限群の作用は必ずしも lift しないので，難しいところかもしれない．

本稿ではこれ以降，標数 0 と標数 p の行き来については扱わず，代数閉体 k 上の K3 曲面と作用についてのみ考える．

3. derivation

定義 3.1. X をスキームとする．X 上の *derivation* とは，k 線形な射 $D\colon \mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_X$ であって，Leibniz 則 $D(fg)=D(f)g+fD(g)$ を満たすものである．

X が標数 p のスキームだとする．X の derivation D による商 X^D とは，位相空間 X と構造層 $\mathcal{O}_{X^D}:=(\mathcal{O}_X)^D:=\{a\in\mathcal{O}_X\mid D(a)=0\}$ からなるスキームである．$(\mathcal{O}_X)^D$ が $\mathcal{O}_X{}^{(p)}:=\{b^p\mid b\in\mathcal{O}_X\}$ を含むことから，この X^D がスキームであることと，フロベニウス射 $X\to X^{(p)}$ が $X\to X^D\to X^{(p)}$ と分解することが分かる．

以下簡単のため X は integral と仮定する．ある $h\in k(X)$ に対し derivation D が $D^p=hD$ を満たすとき，D は p-closed であるという．D が非零かつ p-closed のとき，有限射 $X\to X^D$ の次数は p となる．

命題 3.2. スキーム X への群スキーム μ_p (resp. α_p) の作用は，$D^p=D$ (resp. $D^p=0$) を満たす X 上の derivation D と一対一に対応し，商 X/μ_p (resp. X/α_p) は X^D に一致

する．なお，このような derivation は of multiplicative type (resp. of additive type) であるという．

次に D 作用の固定点を定義する．

定義 3.3. D をスキーム X 上の derivation とする．$\mathrm{Im}(D)$ の生成する $\mathcal{O}_X$ のイデアルに対応する X の閉部分スキームを $\mathrm{Fix}(D)$ と書き，これ（の台）の元を D の**固定点**とよぶ．D が $G = \mu_p$ または $G = \alpha_p$ の作用に対応するとき，G 作用の固定点ともよぶ．

D を X 上の derivation とするとき，D は Ω_X^i にも自然に作用する：$D(df) = d(D(f))$ および $D(\alpha \wedge \beta) = D(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge D(\beta)$ で特徴づけられる．したがって $H^0(X, \Omega_X^i)$ にも作用する．また，元の derivation D が $D^p = \lambda D$（$\lambda \in k$）を満たすならば Ω_X^i や $H^0(X, \Omega_X^i)$ への拡張も同じ関係式を満たす．

4. K3 曲面への群スキームの作用と商

動機づけも兼ねて，まず 4.1–4.2 節で有限群の K3 曲面への作用について復習し，その後に 4.3–4.4 節で（標数 p での）μ_p や α_p の作用について述べる．

4.1. $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ 作用（l は標数と異なる素数）

$H^0(X, \Omega_X^2)$ は 1 次元 k ベクトル空間なので，各 $g \in \mathrm{Aut}(X)$ の $H^0(X, \Omega_X^2)$ への作用は定数倍であるが，標数 2 で超特異の場合を除き，この定数はいつでも 1 の冪根であることが知られている（標数 0 の場合：上野 [Uen75, Theorem 14.10] または Nikulin [Nik81, Theorem 10.1.2]．標数 $p > 0$ で超特異でない場合：Lieblich–Maulik [LM18a] の結果を用いて標数 0 に帰着する．標数 $p > 2$ で超特異の場合：Nygaard [Nyg80, Theorem 2.1]．）

定義 4.1. 群 G の K3 曲面 X への作用は，誘導する $H^0(X, \Omega_X^2)$ への作用が自明であるとき，*symplectic* であるという．

定理 4.2 (Nikulin [Nik79, Section 4] $+\alpha$)**.** X を K3 曲面とし，有限群 G が X に作用しているとする．k の標数は G の位数を割らないとする．このとき，G の作用が symplectic ならば X/G は RDP K3 曲面であり，non-symplectic ならば X/G は RDP Enriques 曲面または有理曲面である．

証明．作用が symplectic ならば商が RDP K3 曲面になることのみ証明する．

各固定点での接空間への（その点の固定部分群の）作用は，標数と素であることから線形化でき，symplectic であることから $\mathrm{SL}_2(k)$ に含まれることが従い，位数が標数と素な $\mathrm{SL}_2(k)$ の有限部分群の作用であることから商は RDP になる．

前段落から，固定点集合が孤立点のみからなることが分かる．したがって分岐因子が 0 なので，X 上の大域 2 次微分形式は $(X/G)^{\mathrm{sm}}$ 上のものを誘導し，零点集合も対応する（$Y^{\mathrm{sm}} = Y \setminus \mathrm{Sing}(Y)$ は Y の smooth locus）．

以上より X は RDP 曲面でその最小特異点解消 $\tilde{X}$ は標準因子が自明であることが分かる．あとは $\tilde{X}$ がアーベル曲面や（標数 2 の non-classical な）Enriques 曲面などでないことを示せばよい（略）． □

Nikulin [Nik79, Section 5] はさらに，アーベル群の場合に，標数 0 の K3 曲面に symplectic に作用しうるアーベル群をすべて決定した．例えば巡回群に関しては位数 8 以

下のものがすべて現れ，それ以外は現れない．アーベル群に限定しない結果は向井 [Muk88, Theorem 0.3] により与えられた．

さらに,（少なくとも巡回群の場合は）symplectic 作用の商特異点も決定されている．簡単のため G が巡回群で位数が素数 l である場合のみ述べる．このとき，$l \leq 7$ であり，G 作用の固定点は必ず $24/(l+1)$ 個あり，その像は A_{l-1} 型の RDP になることが知られている．各点での作用は完備化すると $k[[x,y]]$ への $(g(x), g(y)) = (\zeta_l^i x, \zeta_l^{-i} y)$, $i \in (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^*$, であり商は $k[[x^l, y^l, xy]] \cong k[[X,Y,Z]]/(XY - Z^l)$ である．特異点の個数は，$X \setminus \mathrm{Fix}(G) \to (X/G)^{\mathrm{sm}}$ が位数 l の有限エタール被覆であることを用いて，Euler-Poincaré 標数を比較することで求められる．

symplectic と限らない場合の有限位数自己同型の位数は，素数ならば 19 以下，一般には（標数 2, 3 以外では）66 以下であることが知られている（Keum [Keu16, Main Theorem]）．

4.2. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 作用（標数 p）

k が標数 $p > 0$ で，G が位数 p の巡回群だとする．このときは定理 4.2 は成立しない．そもそも，$H^0(X, \Omega_X^2)$ が標数 p の 1 次元ベクトル空間なので，位数 p の自己同型のこの空間への作用は必ず自明になり，symplectic か否かによる分類は無意味になってしまう．

定理 4.2 のような簡単な判定法は今のところないが，ひとまず G による商が RDP K3 曲面である場合を考える．このとき，各商特異点の（完備化の閉点の補集合の）エタール基本群は G に同型になる．正標数の RDP の基本群および普遍被覆は Artin [Art77, Sections 4–5] により計算されており，このことから商特異点は標数 2 のとき D_{4r}^r または E_8^2, 標数 3 のとき E_6^1, 標数 5 のとき E_8^1, に限られる（それ以外の標数では存在しない）ことが分かる．Dolgachev–Keum [DK01, Theorem 2.4 and Remark 2.6] は，大域的な考察により，$p \leq 5$ を示し，特異点の配置（何がいくつあるか）をある程度限定した．[Mat19b, Theorem 7.3] で可能な配置を完全に決定した．結果は 4.4 節でまとめて述べる．

商が RDP K3 曲面と限らない場合（他には RDP Enriques 曲面と有理曲面の可能性がある），標数 p 位数 p の自己同型は $p \leq 11$ で存在し他の p では存在しないことが知られている（Dolgachev–Keum [DK09, Theorem 2.1]）．

4.3. μ_p 作用（標数 p）

定理 2.5 より，μ_p や α_p は K3 曲面に作用できないが，RDP K3 曲面には作用しうる．

X が smooth でない RDP K3 曲面のとき，$H^0(X, \Omega_X^2) = 0$ だが，$H^0(X^{\mathrm{sm}}, \Omega_X^2)$ は 1 次元 k ベクトル空間であり $H^0(\tilde{X}, \Omega_{\tilde{X}}^2)$ と自然に同型になる（$X^{\mathrm{sm}} = X \setminus \mathrm{Sing}(X)$ は X の smooth locus で，$\tilde{X}$ は X の最小特異点解消）．μ_p の作用に対応する derivation D はこの 1 次元空間 $H^0(X^{\mathrm{sm}}, \Omega_X^2)$ に定数倍で作用し，$D^p = D$ なのでその定数は $\{x \in k \mid x^p = x\} = \mathbb{F}_p$ に属する．そこで，定義 4.1 に倣って次のように定義する．

定義 4.3 ([Mat19a, Definition 2.6]). RDP K3 曲面 X への μ_p の作用は，対応する derivation の $H^0(X^{\mathrm{sm}}, \Omega_X^2)$ への作用が自明（零）であるとき，*symplectic* であるという．

すると，定理 4.2 の類似である次の定理が成り立つ．

定理 4.4 ([Mat19a, Theorem 5.1]). X を標数 p の RDP K3 曲面とし，$G = \mu_p$ が X に作用しているとする．このとき，G の作用が symplectic ならば X/G は RDP K3 曲面であり，non-symplectic ならば X/G は RDP Enriques 曲面または有理曲面である．

証明．商写像をπと書く．まず一般に，X^{sm}上の$\Omega^2_X((D))$の大域切断と$(X^D)^{\mathrm{sm}}$上の$\Omega^2_{X^D}(\pi_*((D)))$の大域切断が一対一に対応し，零点集合も対応する [Mat19a, Proposition 2.14], [Mat19b, Proposition 2.7]．ただし(D)は$\mathrm{Fix}(D)$の因子部分である．この事実も位数が標数と素な群の作用による商の場合と類似するが，その場合は単に商の微分形式を引き戻すことで同型写像が得られるのに対し，今の場合はもう少し工夫がいるという違いはある（πは純非分離なので微分形式の引き戻しは零写像になってしまう）．

作用がsymplecticならば商がRDP K3曲面になることのみ証明する．

商特異点がRDPであることを示す．固定点が滑らかな点の場合，D作用を線形化でき，symplecticであることから$(D(x), D(y)) = (ix, -iy), i \in \mathbb{F}_p^*$, の形に書けることが分かる（$x, y$は極大イデアルの生成系）．完備化すると商は$k[[x^p, y^p, xy]] \cong k[[X, Y, Z]]/(XY - Z^p)$である．RDPである固定点がある場合は，$X$のその点でのblow-up X'にD作用が延長するので，そちらに帰着する（RDPのblow-upとμ_p商はいずれも大域微分形式を保つことから$X'^D \to X^D$がcrepantであることが従う）．

前段落から，固定点集合が孤立点のみからなることが分かる．したがって，$(D) = 0$が成り立ち，前述の対応で$(X^D)^{\mathrm{sm}}$上の大域微分形式が得られる．

以上よりXはRDP曲面でその最小特異点解消$\tilde{X}$は標準因子が自明であることが分かる．あとは$\tilde{X}$がアーベル曲面や（標数2のnon-classicalな）Enriques曲面などでないことを示せばよい（略）． □

有限群の作用の場合にはXとして滑らかなK3曲面のみ考えていたが，今はX自身にも特異点があることが避けられないので，商特異点の考察がややこしくなる．そこで次のmaximalという条件を課して考えることにする．

定義 4.5 ([Mat19a, Definition 4.6], [Mat19b, Definition 3.4])**.** RDP K3曲面Xに$G = \mu_p$または$G = \alpha_p$が作用しているとし，商写像を$\pi\colon X \to X/G$と書く．どの閉点$x \in X$に対してもxと$\pi(x)$の高々一方のみが特異点であるとき，G作用（または対応するderivation，または商写像π）は*maximal*であるという．

命題 4.6 ([Mat19a, Proposition 6.6], [Mat19b, Corollary 3.5])**.** 任意のRDP K3曲面へのG作用はmaximalなものに双有理同値である．

μ_p作用がsymplecticかつmaximalである場合，$p \leq 7$でありX/μ_pの特異点は$24/(p+1)$個のA_{p-1}であることが分かる（[Mat19a, Theorem 7.1]）．これも4.1節の場合の類似である．ただし証明は大きく異なる．

μ_p商やα_p商は純非分離なので，次の意味で「逆向き」の射を考えることができる．これを用いると，Xの特異点の決定はμ_p, α_p商特異点の分類に帰着できる．

命題 4.7 ([Mat19b, Corollary 4.4])**.** X, YがRDP K3曲面で，$\pi\colon X \to Y$が$G = \mu_p$または$G = \alpha_p$による商写像だとする．このとき，$\pi'\colon Y \to X^{(p)}$も$G' = \mu_p$または$G' = \alpha_p$による商写像である．GとG'は一致することも異なることもある．

商がRDP K3曲面と限らない場合（他にはRDP Enriques曲面と有理曲面の可能性がある），μ_p作用は$p \leq 19$で存在し他のpでは存在しない（[Mat19a, Section 8]）．$p = 19$での例は例2.6で挙げた．$p = 17, 13$での例も同様に標数0の位数p自己同型の（唯一の）例の還元として得られる．

表 1: 標数 p での $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$, μ_p, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, α_p 商 K3 曲面の特異点

char.	G		$\mathrm{Sing}(Y)$	$\lvert\mathrm{Pic}(Y^{\mathrm{sm}})_{\mathrm{tors}}\rvert$
$p \geq 0$	$\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$	$l \leq 7$ prime, $l \neq p$	$\frac{24}{l+1}A_{l-1}$	l
p	μ_p	$p \leq 7$	$\frac{24}{p+1}A_{p-1}$	p
5	$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$		$2E_8^1$	1
3	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$		$2E_6^1$	1
2	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$		$2D_4^1$, $1D_8^2$, or $1E_8^2$	1
5	α_5		$2E_8^0$	1
3	α_3		$2E_6^0$	1
2	α_2		$2D_4^0$, $1D_8^0$, or $1E_8^0$	1

$p > 19$ で存在しないことは次のように示される．定理 2.5 から RDP が存在し，さらに命題 4.6 よりそれは固定点でないとしてよい．μ_p または α_p の非固定的な作用をもつ RDP を分類することができ [Mat19a, Theorem 4.7(1) の証明]，$p > 5$ なら A_{mp-1} に限られる．$mp-1$ は K3 曲面の第 2 Betti 数 22 より小さいので $p \leq 19$ が従う．

4.4. α_p **作用（標数** p**）**

α_p 作用についても定義 4.3 と同様に symplectic を定義することはできるが，α_p の作用に対応する derivation は $D^p = 0$ を満たすため，1 次元ベクトル空間への作用は必ず自明になるので，symplectic か否かによる分類は無意味になってしまう．このため定理 4.4 の類似は成立しない．

定理 4.4 のような簡単な判定法は今のところないが，ひとまず G による商が RDP K3 曲面である場合を考える．命題 4.6 を用いて maximal と仮定すると，正則局所環の（固定点が閉点のみである）α_p 作用による商特異点の分類 [Mat19b, Lemma 3.6(2)] より，商特異点は標数 2 のとき D_{4r}^0 または E_8^0, 標数 3 のとき E_6^0, 標数 5 のとき E_8^0, に限られる（それ以外の標数では存在しない）ことが分かる．さらに，可能な商特異点の配置を決定した．$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ などの場合もあわせて述べる：

定理 4.8 ([Mat19b, Theorems 7.1, 7.3])**.** G を $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$（l は p と異なる素数）, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, μ_p, α_p のいずれかとする．標数 p の RDP K3 曲面 X に G が作用していて商 $Y = X/G$ も RDP K3 曲面だとする．$G = \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の場合には X は smooth と仮定し，$G = \mu_p, \alpha_p$ の場合には作用は maximal であると仮定する．このとき Y の特異点 $\mathrm{Sing}(Y)$ および $\lvert\mathrm{Pic}(Y^{\mathrm{sm}})_{\mathrm{tors}}\rvert$ は表 1 のようになる．逆も成り立つ（詳細略）．

とくに，Y の特異点の個数は（重み付きで数えると）どの場合でも $24(p-1)/(p+1)$ になる（p は群スキームの位数）．

$\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ 作用（標数 $p \neq l$）と μ_p 作用（標数 p），$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 作用（標数 p）と α_p 作用（標数 p）がそれぞれ類似していることが分かる．

商が RDP K3 曲面と限らない場合（他には RDP Enriques 曲面と有理曲面の可能性がある），α_p 作用は $p \leq 11$ で存在し $p > 19$ では存在しない（例は [Mat19b, Section 9]，非存在は μ_p の場合と全く同様）．$p = 13, 17, 19$ については今のところ不明．

5. 高さ

正標数のK3曲面には高さとよばれる不変量があり，形式Brauer群を用いて定義される．

定義 5.1. 体k上の（滑らかな可換1次元）**形式群**とは，$F \in k[[x,y]]$（あるいはRを$k[[x]]$に同型な環として元$F \in R \hat{\otimes} R$）で結合律$F(x,F(y,z)) = F(F(x,y),z)$などの条件を満たすものである．$\mathrm{char}\, k = p > 0$のとき，"$p$倍写像" $[p](x) := F(F(\dots,x),x)$に関して，

- ある整数$h \geq 1$に対して$[p](x) \in k[[x^{p^h}]]$かつx^{p^h}の係数は非零であるとき，この形式群の**高さ**はhであるといい，
- $[p](x) = 0$のとき，この形式群の**高さ**は∞であるという．

注 5.2. kが標数0の体のときは,（滑らかな可換1次元）形式群はすべて同型である．例えば，下記の$\hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{m}}$と$\hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{a}}$の間の同型射は指数関数／対数関数のTaylor展開を用いて構成できる．しかしこれらの級数はあらゆる素数を分母にもつため，正標数では使えない．

例 5.3.
- $F(x,y) = x+y$で定まる形式群$\hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{a}}$は，正標数のとき，$[p](x) = 0$であり高さは$\infty$である．
- $F(x,y) = x+y+xy$で定まる形式群$\hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{m}}$は，正標数のとき，$[p](x) = x^p$なので高さは1である．
- 楕円曲線Eに対し，Eの加法構造からEの原点での完備化$\hat{E} := \mathrm{Spf}\, \hat{\mathcal{O}}_{E,0}$に形式群の構造が定まる．$\hat{E}$の高さ$h$は1または2である．$h=1$ (resp. $h=2$) のときEは通常 (ordinary) (resp. 超特異 (supersingular)) な楕円曲線である．

Artin–Mazur [AM77] は一般次元のCalabi–Yau多様体に対する形式群を導入し，その高さを多様体の高さと定義した．K3曲面の場合，この形式群は形式Brauer群とよばれる．楕円曲線の場合，この形式群は形式Picard群とよばれ，上記の$\hat{E}$に自然に同型になる．

また，この高さはtruncated Witt vector係数のコホモロジーで特徴づけられる：

定理 5.4 (van der Geer–桂 [vdGK00, Theorem 5.1])**.** K3曲面Xに対し，

$$\mathrm{ht}(X) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid F^* \colon H^2(X, W_n(\mathcal{O}_X)) \to H^2(X, W_n(\mathcal{O}_X)) \text{ は非零である}\}.$$

ただし$\min \emptyset := \infty$とする．なお$F \colon X \to X$はフロベニウス射であり，$W_n(\mathcal{O}_X)$は$\mathcal{O}_X$上のtruncated Witt vectorのなす環の層である．

6. μ_p, α_p 作用と高さ

RDP K3曲面Xに$G = \mu_p$または$G = \alpha_p$が作用していて，商YもRDP K3曲面だとする．このとき作用とX, Yの高さには密接な関係がある．これを証明するために，まず高さの概念をK3曲面からK3曲面間の射へ一般化する．Witt vectorコホモロジーを用いた特徴付け（定理5.4）は滑らかなK3曲面についてのものだったが，RDP K3曲面でも成り立つことが分かる（RDP K3曲面の高さはその最小特異点解消の高さと定める）ので，次のように一般化できる．

定義 6.1 ([Mat19c, Definition 6.1])**.** RDP K3曲面間の射$\pi \colon X \to Y$の**高さ**$\mathrm{ht}(\pi)$を次で定める．

$$\mathrm{ht}(\pi) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \pi^* \colon H^2(Y, W_n(\mathcal{O}_Y)) \to H^2(X, W_n(\mathcal{O}_X)) \text{ は非零である}\}.$$

定理 6.2 ([Mat19c, Theorem 6.6]). π が $G=\mu_p$ または $G=\alpha_p$ による商写像だとする．

(1) π が maximal であるとき，

$$\mathrm{ht}(\pi)=\begin{cases}1 & \text{if } G=\mu_p \text{ (このとき } p\le 7 \text{ かつ } \mathrm{Sing}(Y)=\frac{24}{p+1}A_{p-1}),\\ 2 & \text{if } G=\alpha_p \text{ and } (p,\mathrm{Sing}(Y))=(2,2D_4^0),(3,2E_6^0),(5,2E_8^0),\\ 3 & \text{if } G=\alpha_p \text{ and } (p,\mathrm{Sing}(Y))=(2,1D_8^0),\\ 4 & \text{if } G=\alpha_p \text{ and } (p,\mathrm{Sing}(Y))=(2,1E_8^0)\end{cases}$$

が成り立つ．なお，これですべての場合を尽くしている（定理 4.8）．

(2) （π が maximal か否かによらず，）$\mathrm{ht}(\pi)$ は有限である．

(3) π' を命題 4.7 のように定めるとき，$\mathrm{ht}(X)=\mathrm{ht}(Y)=\mathrm{ht}(\pi)+\mathrm{ht}(\pi')-1$ である．とくに，X および Y の高さは有限である．

証明. (1) 局所環の射 $\pi\colon \mathrm{Spec}\,B\to\mathrm{Spec}\,A$ と自然数 n に対し，π による引き戻し写像 $\pi^*\colon \mathrm{Ext}^2_{W_n(A)}(A/\mathfrak{m}_A,W_n(A))\to\mathrm{Ext}^2_{W_n(B)}(B/\mathfrak{m}_AB,W_n(B))$ を定義する（[Mat19c, Section 3]）．π が RDP K3 曲面の射 $\pi\colon X\to Y$ の局所化（つまり $B=\mathcal{O}_{X,x}$，$A=\mathcal{O}_{Y,\pi(x)}$）である場合，この射は $\mathrm{Ext}^2_{W_n(A)}(A/\mathfrak{m}_A,W_n(A))\cong\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_Y/\mathfrak{m}_{\pi(x)},W_n(\mathcal{O}_Y))\xrightarrow{\gamma}\mathrm{Ext}^2(W_n(\mathcal{O}_Y),W_n(\mathcal{O}_Y))=H^2(W_n(\mathcal{O}_Y))$ および X の方の同様の射を通じて $\pi^*\colon H^2(Y,W_n(\mathcal{O}_Y))\to H^2(X,W_n(\mathcal{O}_X))$ と可換である．また $n=1$ のとき γ は同型射である．これらを用いて，曲面の方の π^* が零写像か否かを局所環の方の π^* の計算から決定できる場合がある．

π が (1) の条件を満たす射の場合，G 作用の固定点とその像である商特異点に対し具体的に Ext^2 間の射 π^* を計算（詳細略）することで，$\mathrm{ht}(\pi)$ に関する主張が従う．

(2) 命題 4.6 で maximal の場合に帰着できる．

(3) $n\ge\mathrm{ht}(\pi)$ のとき π^* の像が $V^{\mathrm{ht}(\pi)-1}(H^2(X,W_{n-(\mathrm{ht}(\pi)-1)}(\mathcal{O}_X)))$ であることが示せる．ここから，$\mathrm{ht}(\pi)-1$ が合成に関して加法的に振る舞うことが従う．定義から $\mathrm{ht}(X)=\mathrm{ht}(F_X\colon X\to X)$ であり，そして $F_X=\pi'\circ\pi$ である． □

系 6.3. RDP K3 曲面 X に $G=\mu_p$ または $G=\alpha_p$ が（非自明に）作用しているとする．このとき，X が高さ有限ならば X/G は RDP K3 曲面であり，X が高さ無限ならば X/G は RDP Enriques 曲面または有理曲面である．

証明. 商としてこれ以外の可能性がないことは [Mat19b, Proposition 4.1] で示した．

X/G が RDP K3 曲面ならば定理 6.2(3) より $X, X/G$ は高さ有限である．

X/G が RDP Enriques 曲面または有理曲面だとする．いずれの場合も，l 進エタールコホモロジー群 $H^2_{\text{ét}}(X/G,\mathbb{Q}_l)$ は代数的サイクル（因子）のコホモロジー類で生成されていることに注意する．π が純非分離なので，$\pi^*\colon H^2_{\text{ét}}(X/G,\mathbb{Q}_l)\to H^2_{\text{ét}}(X,\mathbb{Q}_l)$ は同型射であり，したがって $H^2_{\text{ét}}(X,\mathbb{Q}_l)$ は代数的サイクルで生成され，X の最小特異点解消 $\tilde{X}$ に関してもそうである．これが可能なのは高さ無限（超特異）のときのみである． □

注 6.4. 本節では $G=\mu_p$ または $G=\alpha_p$ による商写像の高さの決定について述べたが，一般の RDP K3 曲面のフロベニウス射に対して同様の議論を行うことができる．この結果，X が non-taut RDP をもつときに，$\mathrm{ht}(X)$ を決定もしくは下から評価することができる．詳細は [Mat19c, Theorem 1.2] をご参照いただきたい．

参考文献

[Art77] M. Artin, *Coverings of the rational double points in characteristic p*, Complex analysis and algebraic geometry, Iwanami Shoten, Tokyo, 1977, pp. 11–22.

[AM77] M. Artin and B. Mazur, *Formal groups arising from algebraic varieties*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **10** (1977), no. 1, 87–131.

[DK01] Igor V. Dolgachev and JongHae Keum, *Wild p-cyclic actions on $K3$-surfaces*, J. Algebraic Geom. **10** (2001), no. 1, 101–131.

[DK09] ———, *Finite groups of symplectic automorphisms of $K3$ surfaces in positive characteristic*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 1, 269–313.

[vdGK00] G. van der Geer and T. Katsura, *On a stratification of the moduli of $K3$ surfaces*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **2** (2000), no. 3, 259–290.

[Keu16] JongHae Keum, *Orders of automorphisms of K3 surfaces*, Adv. Math. **303** (2016), 39–87.

[Kon92] Shigeyuki Kondō, *Automorphisms of algebraic $K3$ surfaces which act trivially on Picard groups*, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), no. 1, 75–98.

[LN80] William E. Lang and Niels O. Nygaard, *A short proof of the Rudakov-Šafarevič theorem*, Math. Ann. **251** (1980), no. 2, 171–173.

[LM18a] Max Lieblich and Davesh Maulik, *A note on the cone conjecture for K3 surfaces in positive characteristic*, Math. Res. Lett. **25** (2018), no. 6, 1879–1891.

[LM18b] Christian Liedtke and Yuya Matsumoto, *Good reduction of K3 surfaces*, Compos. Math. **154** (2018), no. 1, 1–35.

[Mat16] Yuya Matsumoto, *Extendability of automorphisms of K3 surfaces* (2016), available at `http://arxiv.org/abs/1611.02092`.

[Mat19a] ———, *μ_n-actions on K3 surfaces in positive characteristic* (2019), available at `http://arxiv.org/abs/1710.07158v2`.

[Mat19b] ———, *μ_p- and α_p-actions on K3 surfaces in characteristic p* (2019), available at `http://arxiv.org/abs/1812.03466v2`.

[Mat19c] ———, *Inseparable maps on W_n-valued Ext groups of non-taut rational double point singularities and the height of K3 surfaces* (2019), available at `http://arxiv.org/abs/1907.04686`.

[Muk88] Shigeru Mukai, *Finite groups of automorphisms of $K3$ surfaces and the Mathieu group*, Invent. Math. **94** (1988), no. 1, 183–221.

[Nik79] V. V. Nikulin, *Finite automorphism groups of Kähler $K3$ surfaces*, Trudy Moskov. Mat. Obshch. **38** (1979), 75–137 (Russian). English translation: Trans. Moscow Math. Soc. **1980**, no. 2, 71–135.

[Nik81] ———, *Factor groups of groups of automorphisms of hyperbolic forms with respect to subgroups generated by 2-reflections. Algebrogeometric applications*, Current problems in mathematics, Vol. 18, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Informatsii, Moscow, 1981, pp. 3–114 (Russian). English translation: J. Soviet Math. **22** (1983), no. 4, 1401–1475.

[Nyg79] Niels O. Nygaard, *A p-adic proof of the nonexistence of vector fields on $K3$ surfaces*, Ann. of Math. (2) **110** (1979), no. 3, 515–528.

[Nyg80] ———, *Higher de Rham-Witt complexes of supersingular $K3$ surfaces*, Compositio Math. **42** (1980/81), no. 2, 245–271.

[OZ00] Keiji Oguiso and De-Qi Zhang, *On Vorontsov's theorem on $K3$ surfaces with non-symplectic group actions*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), no. 6, 1571–1580.

[RS76] A. N. Rudakov and I. R. Shafarevich, *Inseparable morphisms of algebraic surfaces*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **40** (1976), no. 6, 1269–1307, 1439 (Russian). English translation: Math. USSR-Izv. **10** (1976), no. 6, 1205–1237.

[Uen75] Kenji Ueno, *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 439, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975. Notes written in collaboration with P. Cherenack.