

線形代数学 IA 演習問題：置換の積

松本雄也 (matsumoto.yuya.m@gmail.com)

2019年06月26日(水)

置換 σ, τ を $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ で定める. また, ε を ($\{1, 2, 3, 4\}$ の) 単位置換とする.

問題 1001. σ による 1, 2, 3, 4 それぞれの像を答えよ. τ についても答えよ.

問題 1002. 次の積を計算せよ. (答は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$ の形で書いてもよいし, 巡回置換の積で書いてもよいし, σ などを用いて書いてもよい.)

- $\varepsilon(12) =$
- $(12)\varepsilon =$
- $(12)(12) =$
- $(12)(12)(12) =$
- $(12)(23) =$
- $(23)(12) =$
- $(12)(23)(12) =$
- $(23)(12)(23) =$
- $(12)(23)(12)(23)(12)(23) =$
- $(12)(34) =$
- $(34)(12) =$
- $(12)(23)(34) =$
- $\varepsilon\sigma =$
- $\sigma\varepsilon =$
- $\sigma\tau =$
- $\tau\sigma =$
- $\sigma^2 =$
- $\sigma^3 =$
- $\sigma^4 =$
- $\tau^2 =$
- $\tau^3 =$
- $\tau^4 =$
- $\sigma^{-1} =$
- $\tau^{-1} =$

問題 1003. $\varepsilon, \sigma, \tau, \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ をそれぞれ巡回置換の積で表せ.

問題 1004. $\varepsilon, \sigma, \tau, \rho, \alpha, \sigma\tau, \tau\sigma$ をそれぞれ互換の積で表し, その符号を求めよ.

なお「 $\sim\sim$ の積」には「 $\sim\sim$ 」1個の積や0個の積も含む.

チャレンジ問題 1001. $\{1, 2, \dots, n\}$ の好きな置換 σ, τ をとって $\sigma\tau$ と $\tau\sigma$ をそれぞれ巡回置換の積で表すことをいくつかの場合に行ってみよ. 何らかの規則性を見出させるか?