群論および環論期末試験問題

松本雄也 (matsumoto.yuya.m@gmail.com)

2025 年 1 月 31 日

これまでの群論の講義および環論の講義の期末試験問題等として出題してきた問題（一部改題）を合併したものです．

解説は面倒なのでつけません．

1　群論

1 ① $\mathfrak{S}_3$ の元をすべて挙げ，それぞれの位数を答えよ．【答えだけでよい】

② $\mathfrak{S}_3$ の部分群を（自明なものも含めて）すべて挙げ，それぞれ $\mathfrak{S}_3$ の正規部分群か否かを答えよ．【答えだけでよい】

③ $\mathfrak{S}_3$ の正規でない部分群を 1 つ選び，正規部分群でない理由を簡単に述べよ．

2 ① 群 G の元 g, g' が共役であることの定義を述べよ．

② $\mathrm{GL}(2, \boldsymbol{R})$ の元 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ が共役であることを示せ．

3 G を群とする．$Z = \{x \in G \mid \text{任意の } g \in G \text{ に対して } xg = gx\}$ とおく．Z は G の部分群であることを示せ．

4 $G_1 = (\boldsymbol{Z}/5\boldsymbol{Z})^*$，$G_2 = (\boldsymbol{Z}/8\boldsymbol{Z})^*$ とおく．

① G_1 の元をすべて書き，それぞれの元の位数を答えよ．【答えだけでよい】

② G_1 と G_2 が群として同型か否か判定せよ．

5 準同型写像 $f\colon \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}/3\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}/5\boldsymbol{Z}\colon a \mapsto ([a], [a])$ を考える（1 つめの $[a]$ は $3\boldsymbol{Z}$ に関する同値類で，2 つめの $[a]$ は $5\boldsymbol{Z}$ に関する同値類）．

① $f(c) = ([1], [0])$，$f(d) = ([0], [1])$ を満たす整数 c, d を 1 つずつ挙げよ．【答えだけでよい】

② $\operatorname{Ker} f$ は $\boldsymbol{Z}$ の部分群なので非負整数 N を用いて $\operatorname{Ker} f = N\boldsymbol{Z}$ と書ける．N を求めよ．【答えだけでよい】

③ $\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z}$ が $\boldsymbol{Z}/3\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}/5\boldsymbol{Z}$ に同型であることを示せ．

④ 既約剰余類群 $(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})^*$ の位数 2 の元は全部で 3 つある．すべて挙げよ．【答えだけでよい】

6 写像 $f\colon \boldsymbol{R} \to \mathrm{GL}(2, \boldsymbol{R})\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ を考える．

① f は準同型写像であることを示せ．

② $\operatorname{Ker} f$ は $2\pi\boldsymbol{Z} := \{2\pi m \mid m \in \boldsymbol{Z}\} \subset \boldsymbol{R}$ に等しいことを示せ．

③ $\mathrm{Im}\, f$ は $\mathrm{SO}(2) := \{P \in \mathrm{GL}(2, \boldsymbol{R}) \mid {}^tPP = E_2,\ \det(P) = 1\}$ に等しいことを示せ．

④ f に準同型定理を適用して得られる同型写像を書け． 【答えだけでよい】

$\boxed{\mathbf{7}}$ 群 $G = \mathrm{GL}(2, \boldsymbol{R})$ の集合 $\boldsymbol{R}^2$ への標準的な作用を考える．すなわち，$g \in G$ と $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$ に対して $g \cdot v = gv$（右辺は行列とベクトルの通常の積）と定める．

① この作用の軌道をすべて求めよ．

② 好きな元 $v \in \boldsymbol{R}^2$ を 1 つ選び，v の固定部分群を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ $G = \mathfrak{S}_5$ とし，$h := (1\ 2)(3\ 4\ 5) \in G$ とし，$H := \langle h \rangle \subset G$ を h が生成する G の部分群とする．

① 元 $g \in G$ で，$gHg^{-1} \neq H$ を満たすものを 1 つ挙げよ．

② 集合 $X := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ への群 H の（標準的な）作用を考える．この作用の軌道をすべて求めよ．

2 環論

$\boxed{\mathbf{51}}$ 以下の写像が環準同型写像か否か答えよ．

① $f\colon \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z} \colon x \mapsto 2x$.

② $g\colon \boldsymbol{Z}[\sqrt{-7}] \to \boldsymbol{Z} \colon x + y\sqrt{-7} \mapsto x$（ただし $x, y \in \boldsymbol{Z}$）．

③ $h\colon \boldsymbol{Z}[\sqrt{-7}] \to \boldsymbol{Z} \colon x + y\sqrt{-7} \mapsto x^2 + 7y^2$（ただし $x, y \in \boldsymbol{Z}$）．

$\boxed{\mathbf{52}}$ $n = 100$ とする．$A \subset \mathrm{M}(n, \boldsymbol{R})$ を，上三角行列全体がなす部分環とする．A の中心は $\{aE \mid a \in \boldsymbol{R}\}$ であることを示せ（ただし E は n 次単位行列を表す）．

$\boxed{\mathbf{53}}$ 環 $A = \mathrm{M}(2, \boldsymbol{R})$ の部分集合 $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \mid c, d \in \boldsymbol{R} \right\}$ を考える．

① I は左イデアルか否か．

② I は右イデアルか否か．

$\boxed{\mathbf{54}}$ a を実数とする．$\boldsymbol{R}[X]/(X^2 + a)$ と $\boldsymbol{C}$ は環として同型か否か．【ヒント：a の値で場合分けせよ．】

$\boxed{\mathbf{55}}$ $A = \boldsymbol{Z}/18\boldsymbol{Z}$ とする．

① A の冪零元をすべて挙げよ． 【答えだけでよい】

② A の零因子をすべて挙げよ． 【答えだけでよい】

③ A のイデアルを（自明なものも含めて）すべて挙げよ． 【答えだけでよい】

④ A の素イデアルをすべて挙げよ． 【答えだけでよい】

$\boxed{\mathbf{56}}$ 以下の条件をすべて満たす環 A とその元 a の例を挙げ，条件を満たすことを証明せよ．a は既約元である．a は素元ではない．

$\boxed{\textbf{57}}$ $\mathfrak{m} \subset A$ を環のイデアルとする．次が同値であることを示せ．

- $\mathfrak{m}$ は A の真のイデアルの中で包含関係に関して極大である．
- $A/\mathfrak{m}$ は体である．

$\boxed{\textbf{58}}$ $A = \boldsymbol{Z}[\sqrt{-7}]$ とする．以下の①–④の中から **1 つ選び**，下線を付した語の定義を述べたうえで証明せよ．

① $3 \in A$ は<u>素元</u>である．

② $3 \in A$ は<u>既約元</u>である．

③ $(3) \subset A$ は<u>素イデアル</u>である．

④ $(3) \subset A$ は<u>極大イデアル</u>である．

$\boxed{\textbf{59}}$ $p = 13$ とする．

① 以下の条件をすべて満たす $t, u \in \boldsymbol{Z}$ を 1 組挙げよ．　【答えだけでよい】

- t と u はどちらも p で割りきれない．
- $t^2 + 10u^2$ は p で割りきれる．

② t, u は前問であなたが選んだ数とする．$B = \boldsymbol{Z}[\sqrt{-10}]$ とし，B のイデアル I, J を $I = (p, t + u\sqrt{-10})$，$J = (p, t - u\sqrt{-10})$ で定める．$IJ = (p)$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{\textbf{60}}$ ① A を環とし，$\mathfrak{p} \subset A$ を素イデアルとする．$\mathfrak{p}$ の補集合 $A \setminus \mathfrak{p}$ は積閉集合であることを示せ．

② 環 A とその積閉集合 $S \subset A$ で，補集合 $A \setminus S$ が A の素イデアルでないものの例を 1 つ挙げよ（素イデアルでないことも証明せよ）．

3　群論チャレンジ問題

腕に覚えがある人用のチャレンジ問題です（実際の試験では，チャレンジ問題以外の問題をすべて完答すれば満点としています）．

$\boxed{\textbf{101}}$ 正整数 n で，全射準同型写像 $\mathfrak{S}_3 \to \boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}$ が存在するものをすべて求めよ．

$\boxed{\textbf{102}}$ 正整数 n に対し，命題「任意の群 G，指数 4 の任意の部分群 $H \subset G$，任意の元 $g \in G$ に対して，$g^n \in H$ である」を $P(n)$ とおく．

① $P(4)$ は成り立たないことを示せ．

② $P(24)$ は成り立つことを示せ．

③ $P(12)$ は成り立つか否か？

$\boxed{\textbf{103}}$ アーベル群 G の元 g, h がそれぞれ位数 $10, 15$ であるときに，gh の位数として考えられる値をすべて決定せよ．

$\boxed{\textbf{104}}$ $G_1 = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, c \in \boldsymbol{R}^*_{>0}, b \in \boldsymbol{R} \} \subset \mathrm{GL}(2, \boldsymbol{R})$ と

$G_2 = \{ \begin{pmatrix} 1 & d & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid d, e, f \in \boldsymbol{R} \} \subset \mathrm{GL}(3, \boldsymbol{R})$ は同型でないことを示せ.

$\boxed{\textbf{105}}$ G が以下のそれぞれの群であるときに，条件「x, y, xy はどれも位数 2 である」を満たす 2 元 $x, y \in G$ が存在するか否かを判定し，存在する場合には例を 1 つ挙げよ.

① $G = \mathfrak{A}_4$,

② $G = \mathrm{GL}(2, \boldsymbol{R})$,

③ $G = \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{R})$,

④ $G = \mathrm{SL}(3, \boldsymbol{R})$.

$\boxed{\textbf{106}}$ $G_1 = \mathfrak{A}_4$ とする．G_2 が以下のそれぞれの群であるときに，G_1 から G_2 への単射群準同型写像が存在するか否かを判定せよ.

① $G_2 = \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{R})$,

② $G_2 = \mathrm{GL}(2, \boldsymbol{R})$,

③ $G_2 = \mathrm{SL}(3, \boldsymbol{R})$.

4 環論チャレンジ問題

腕に覚えがある人用のチャレンジ問題です（実際の試験では，チャレンジ問題以外の問題をすべて完答すれば満点としています）.

$\boxed{\textbf{151}}$ k を体とし，$A = k[X, Y]/(XY - 1)$ とする.

① A は素元分解整域（UFD）であることを示せ.

② A の単数群 A^* を求めよ.（k の単数群 k^* を用いて記述してもよい.）

$\boxed{\textbf{152}}$ 環 $\boldsymbol{C}[X, Y, Z]/(Z^2 + X^3 + Y^3)$ は整域であることを示せ.

$\boxed{\textbf{153}}$ A_1，A_2 を可換環とし，P を直積環 $A_1 \times A_2$ の素イデアルとすると，次のうち少なくとも 1 つが成り立つことを示せ.

- ある A_1 の素イデアル P_1 に対し $P = P_1 \times A_2$ となる.
- ある A_2 の素イデアル P_2 に対し $P = A_1 \times P_2$ となる.

$\boxed{\textbf{154}}$ 次を満たす可換環 A とイデアル I, J_1, J_2, J_3 の例を挙げよ.

条件：$I \subset J_1 \cup J_2 \cup J_3$ であり，どの $k = 1, 2, 3$ に対しても $I \not\subset J_k$ である.