数学科の学生が数学する様子を対話形式で書いてみる

松本雄也 (ymatsu@ms.u-tokyo.ac.jp)

初版 2015 年 03 月 04 日 / 最終更新 2015 年 03 月 05 日

B「今日は K3 曲面について調べます」

A「唐突だな」

B「よく知らないけど」

C「2 次（=最高次）微分のなす可逆層 Ω_X^2 が自明でかつ $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ を満たす完備滑らかな曲面 X のことだって」

B「例えばどんなの？」

A「$\mathbb{P}^3$ の 4 次曲面とか，$\mathbb{P}^4$ の 2 次超曲面と 3 次超曲面の交わりとか，$\mathbb{P}^5$ の 2 次超曲面 3 つの交わり，って」

C「じゃあ $\mathbb{P}^5$ の 2 次超曲面を 3 人で一つずつ挙げて交わりをとってみよっか」

B「変数の名前は何にする？ $X_0, X_1, \ldots$？」

A「それだとややこしいから X, Y, Z, U, V, W にしようか」

$$\begin{matrix} X & Y & Z \\ U & V & W \end{matrix}$$

A「2 次式なら何でもいいのか？」

B「0 でも？」

A「0 はさすがにまずいだろ」

C「1 次式の積に分解するやつもだめだよ」

B「あまり単純なのだと特異点持っちゃいそうだよね」

A「うーんと，例えば変数が X, Y, Z しか出てこないやつだと，$(X = Y = Z = 0)$ っていう 2 次元部分空間と残りの超曲面 2 つとの交わりが非空になって，そこで特異になるからまずいな」

B「じゃあ変数を 4 つは使うやつで」

C「その範囲でなるべく単純なものね」

三人「いっせーの」

A「$Q_1 = XV - UY = 0$」

B「$Q_2 = XW - UZ = 0$」

C「$Q_3 = YW - VZ = 0$」

B「えっと……」

C「とりあえず書いてみる？」

$$XV - UY = XW - UZ = YW - VZ = 0$$

C「そういえば Q_1, Q_2, Q_3 が一次独立という条件も必要だったね．今回は大丈夫」

B「式見てもピンと来ないね……」

A「来ないな」

C「とりあえずアフィン空間 $(X \neq 0)$ に制限して考えてみる？」

A「それやってピンと来たことあんまりないけどな……」

C「まあやってみようよ」

B「$Y/X, Z/X, \ldots$ を $y, z, \ldots$ と書くことにして」

$$v - uy = w - uz = yw - vz = 0$$

B「次数が減って分かりやすくなったんじゃない」

C「$v = uy$ と $w = uz$ を Q_3 に代入するとどうなるかな，と…… あれ？ 代入すると $yuz - uyz$ で 0 になった」

A「え？ それはさすがにおかしいだろ…… あれ，確かに 0 になる」

B「どういうこと？ Q_3 は要らなかったの？」

C「でも最初の式は一次独立だったよね」

A「$X \neq 0$ に制限したからおかしなことになったんじゃないか」

C「じゃあ次は $Y \neq 0$ で考えてみよう．さっきの記号は忘れて，$X/Y, Z/Y, \ldots,$ を $x, z, \ldots$ で表すことにして……」

$$xv - u = xw - uz = w - vz = 0$$

B「$u = xv$ と $w = vz$ を $xw - uz = 0$ に代入？ …… やっぱり $0 = 0$ になっちゃうよ」

A「でもさっきと違って，今回要らなかったのは Q_2 だな」

B「どうなってるの？」

C「そっか，分かった，$Q_1 = Q_2 = 0$ には $X = U = 0$ っていう解があるじゃない」

A「えっと，そりゃそうだ」

C「$(Q_1 = Q_2 = 0)$ には $(X = U = 0)$ っていう部分多様体があって，でもこれは $(Q_3 = 0)$ には含まれなくて，含まれるのは $(Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0)$ の方だけなんだよ」

A「なるほど．…… $(Q_1 = Q_3 = 0)$ や $(Q_2 = Q_3 = 0)$ も同様だな」

C「結局 $(Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0)$ は 3 次元だったのか」

B「それも K3 曲面って言うの？ 曲面じゃないけど？」

A「言わないよな……」

先生「こんにちは，どんな調子ですか」

A「あ，先生」

B「こんにちは」

先生「今日は何を調べてたんですか？ 射影多様体？」

C「えっと，K3 曲面の例を作ろうとしていて，$\mathbb{P}^5$ で 2 次超曲面を 3 つとったんですけど，交わりがそもそも 2 次元にならなくて……」

先生「完全交差じゃない有名な例ですね．この 3 次元多様体 $(Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0)$ の正体は分かりますか？」

B「商体？ って関数体のことですか？」

先生「あっそれじゃなくて（そっちでもいいかな？ いやよくないですね），これ $(Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0)$ ってもっと簡単な記述がありますよね」

C「どうういうこと？」

先生「うーん，ヒントはこの

$$\begin{matrix} X & Y & Z \\ U & V & W \end{matrix}$$

って並んでる形かな」

三人「？？？」

先生「考えてみて下さいね．それじゃ」

A「どういうことだろ？」

B「determinant？」

A「え？」

B「$XV - UY$ って，$\det \begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix}$ だよね」

A「ああ確かに．気づいてなかった」

C「私はそのつもりでこの Q_3 をとったけどね」

B「これを 2×3 行列と見て，2×2 の小行列式が全部消えてるって条件になる」

A「ってことは rank が下がってるのか」

C「……で？」

B「う〜ん……」

A「行列式が 0 ってことは，（$Q_1 = 0$ は）$X : U = Y : V$ ってこと？」

C「どこかが 0 かもしれないけど大雑把にはそうだよね」

B「Q_1 と Q_2 が 0 ってことは $X:U=Y:V$ かつ $X:U=Z:W$ だよね，ってことは $Y:V=Z:W$ が出る？」

A「なんか怪しいぞ．……ああ，$X=U=0$ だと（このとき $X:U=Y:V$ と $X:U=Z:W$ は正しいと言うことにするのかよく分からないが，どちらにしても）$Y:V=Z:W$ は導けない」

C「それがさっきの $(X=U=0)$ っていう部分多様体か」

B「$Q_1=Q_2=Q_3=0$ だと，$X:U$ と $Y:V$ と $Z:W$ はどれも等しくて，比がひとつ定まるね」

A「別の向きにも言えるんじゃないか，$X:Y:Z=U:V:W$ っていう比がひとつ定まる」

C「$0:0$ や $0:0:0$ があるかもしれないけど，射影空間だから変数のどれかひとつは $\neq 0$ だから，well-defined だね」

A「じゃあ，$(Q_1=Q_2=Q_3=0)$ から $\mathbb{P}^1$ と $\mathbb{P}^2$ に射ができる」

B「$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2$ に射ができる」

C「もしかして同型だったりする？」

A「そっか，どっち向きにも比を決めると全体の比が決まるもんな」

C「$(Q_1=Q_2=Q_3=0)$ は $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2$ に同型だったのか」

先生「皆さん，どうですか？ 分かりましたか？」

A「$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2$ の $\mathbb{P}^5$ へのそれっぽい埋め込みになってるんですね」

C「でも K3 曲面がどっか行っちゃったね」

あとがき

本稿の会話はフィクションです．数学的内容には嘘は書いていないつもりですが，間違いを見つけられたらお知らせください．

一般的な数学書には現れない，試行錯誤の様子を描いてみようという試みですが，いかがでしょうか．ご意見・ご感想を歓迎します．

$\mathbb{P}^5$ で 2 次超曲面 3 つの交わりが滑らかな曲面になったならばそれは（次数 8 の）K3 曲面であり，本文ではそのような例を見ようとした（が，話が逸れた）のですが，逆に，次数 8 の very ample line bundle をもつ K3 曲面は 3 つの（“一次独立” な）2 次超曲面に含まれることが示せます．たいていの場合はその交わりが K3 曲面自身になりますが，本文に出てきた例はそうでない場合の例です．

3 人がそんな都合のいい例を挙げたのはご都合主義です．